EDiMaST

ISSN 2421-7247

article

Stick, twine and a pinch of the internet: we measure the Earth today with the method of Eratosthenes

Massimo Trizio, Stefania Donadio

Abstract. *The study is based on laboratory experience carried out in several classes of a professional institute in Milan and a middle school in Genoa that invites to replicate the procedure followed by Eratosthenes 2300 years ago to measure the terrestrial meridian. The course followed by the students is described, divided into several phases with outdoor activities, the situation is modelled through the plane Euclidean geometry, the mathematical problem is posed and the resolution analyzed.* Finally, *the didactic value of the experience is discussed and the use of the Internet is evaluated to determine the distance of the place where the equator is located and to exchange data between twin schools participating in the Eratosthenes Experiment event.*

Key words. *Eratosthenes Experiment, Euclidean Geometry, Geographical* Coordinates, Laboratory *Teaching, Problem Solving*.

Sommario. (Bastone, spago e un pizzico di internet: misuriamo la Terra oggi con il metodo di Eratostene). *Questo studio si fonda sull'esperienza di laboratorio, svolta in più classi di un istituto professionale di Milano e di una scuola media di Genova, che invita a replicare il procedimento seguito da Eratostene 2300 anni fa per misurare il meridiano terrestre. Viene descritto il percorso seguito dagli studenti, articolato in più fasi con attività all'aperto, viene modellizzata la situazione attraverso la geometria euclidea piana, viene posto il problema matematico e analizzata la risoluzione. Viene infine discussa la valenza didattica dell'esperienza e valorizzato l'uso di Internet per determinare la distanza del luogo in cui ci si trova dall'equatore e per la socializzazione dei dati fra scuole gemelle partecipanti all'evento Eratosthenes Experiment*.

Parole chiave. *Coordinate geografiche, didattica laboratoriale, esperimento di Eratostene, geometria euclidea piana, problem solving*.

Introduzione

Nei libri di testo di matematica, la figura di Eratostene compare diffusamente per i contributi sullo studio dei numeri primi, grazie al metodo del *crivello*. Ben più raro è trovare un'analisi del celebre esperimento da lui condotto per calcolare la circonferenza della Terra, citato per lo più come curiosità storica in alcuni testi per la scuola secondaria di secondo grado, mentre non risulta presente nei libri delle scuole del primo ciclo. Non mancano invece libri, saggi e articoli scientifici, che analizzano anche nel dettaglio questa importante impresa, riconoscendone il valore culturale e argomentando perfino come esso sia stato uno dei più belli esperimenti della storia (Crease, 2007).

Dal 2016 è stata pubblicizzata su diversi siti di ricerca e di didattica della matematica la piattaforma greca Eratosthenes Experiment (http://eratosthenes.ea.gr/), che invita gli insegnanti di tutte le scuole del mondo e di qualunque ordine a riprodurre l'esperimento nei giorni di equinozio di primavera o d'autunno, perciò offre una molteplicità di spunti didattici e, previa registrazione della propria scuola con le coordinate geografiche, mette a disposizione un servizio di abbinamento tra due scuole situate approssimativamente lungo lo stesso meridiano, che chiameremo "scuole gemelle", per poter confrontare le misure.

La partecipazione a questo evento, da parte di una scuola secondaria di primo grado genovese e di alcune classi di un istituto di secondo grado milanese, è stata l'occasione per analizzare a fondo lo scenario offerto da questo particolare contesto, infatti, nonostante siano passati migliaia di anni, l'esperimento di Eratostene rimane un laboratorio straordinario di educazione matematica e scientifica, che permette di agire su una molteplicità di aspetti didattici.

- Concettuale: si affrontano alcuni temi fondamentali della matematica, quali la proporzionalità, la geometria euclidea, la trigonometria, in un contesto laboratoriale di immediato confronto con oggetti reali che ne esprimono il significato.
- Metodologico: si utilizza un approccio attivo in termini di problem posing e problem solving e di didattica laboratoriale in tutta la fase di misura, di riflessione e di elaborazione dei dati.
- Scientifico: viene reso evidente l'intreccio tra la matematica e altre discipline (astronomia, geologia e geografia) e quindi attivati i processi di modellizzazione e rappresentazione simbolica.
- Storico-culturale: si contestualizza un ragionamento matematico e scientifico nella sua epoca, valorizzando la grandiosità di scoperte effettuate più di 2000 anni fa e riproducendo le osservazioni effettuabili con le tecnologie di allora.
- Sociale: le possibilità offerte da Internet facilitano la socializzazione dei dati e la loro discussione, facendo scorgere la necessità nel lavoro del contributo comunitario.
- Competenze di cittadinanza: la ricerca della distanza della propria città dall'equatore porta a riflettere sull'affidabilità delle informazioni reperibili tramite Internet; la motivazione della scelta del giorno e dell'ora e delle località in cui eseguire l'esperimento facilita la comprensione delle nozioni di longitudine, latitudine, fuso orario e ora legale.

Requisiti e osservazioni preliminari

Per comprendere l'esperimento è utile visualizzare nel modello sferico terrestre il reticolato geografico, costituito da meridiani e paralleli e le sue proprietà geometriche. Al livello della scuola secondaria di primo grado, si può osservare e descrivere un mappamondo, evidenziando la differenza fra i meridiani, identificabili come le circonferenze massime passanti per i Poli, uguali fra loro, ed i paralleli che invece sono circonferenze a raggio variabile, giacenti su piani paralleli a quello equatoriale (Fig.1). Un'altra importante osservazione riguarda l'arbitrarietà della longitudine, riferita convenzionalmente al meridiano di Greenwich, e l'univocità della latitudine, riferita all'equatore, a sua volta identificato naturalmente come la circonferenza massima equidistante dai Poli.

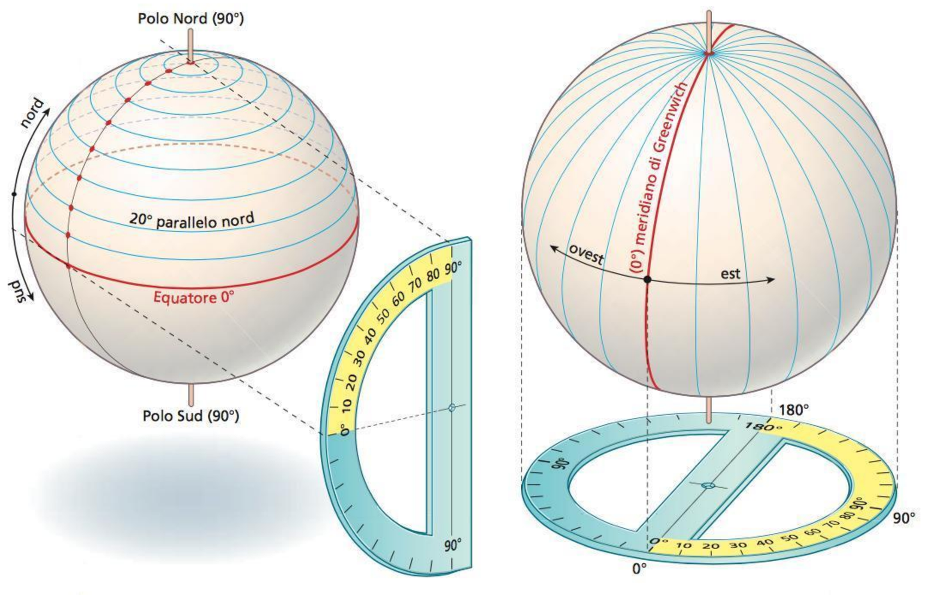


Fig.1 - Modello della Terra con paralleli e meridiani del reticolato geografico, coordinate di latitudine e longitudine espresse in gradi.

Occorre poi distinguere il concetto di mezzogiorno *locale* e di mezzogiorno *indicato dall'orologio*. Il primo è individuabile con una meridiana: fissato uno gnomone (vedi Fig.6) e annotate le ombre in diversi momenti della giornata, viene determinato come il momento in cui l'ombra è più corta; esso non coincide, nella maggioranza delle località italiane, col mezzogiorno indicato dall'orologio, che invece corrisponde a quello del fuso orario dell'Europa centrale e cambia nei mesi in cui vige l'ora legale estiva.
Si scopre come lo sfasamento del mezzogiorno locale sia connesso alla longitudine del luogo e come l'ombra a mezzogiorno dell'equinozio sia connessa alla latitudine. Quest'osservazione richiede a sua volta di riflettere su cosa caratterizzi l'equinozio (Eratostene aveva sfruttato una proprietà del solstizio d'estate, ma in quella data in Italia ed in altri paesi le scuole sono chiuse, forse anche per questo il sito propone l'attività in occasione degli equinozi).
È necessario anche ragionare sul fatto che le scuole che si trovano lungo lo stesso meridiano (aventi quindi la stessa longitudine) hanno lo stesso mezzogiorno locale. Infine va osservato che all'equinozio di autunno in Italia è in vigore l'ora legale estiva e compreso cosa questo comporti; il cambio d'ora non viene più percepito dagli alunni perché è automatizzato negli orologi dei telefoni cellulari.
Nella riflessione si utilizzano le seguenti proprietà geometriche:

- l'uguaglianza degli angoli alterni interni individuati da rette parallele tagliate da una trasversale;
- l'appartenenza del centro di una circonferenza alle rette ad essa perpendicolari

(intendiamo per retta perpendicolare a una circonferenza in un punto, la perpendicolare alla retta tangente in quel punto);

– la proporzionalità tra ampiezza dell'angolo al centro di una circonferenza e lunghezza dell'arco sotteso.

Nel modello geometrico si sfrutta il parallelismo dei raggi solari che giungono sulla Terra. Questa proprietà non è percepita come intuitiva dalla maggioranza degli studenti che hanno come schema ingenuo un modello di Sole puntiforme con raggi divergenti, come appare nel classico disegno dei bambini nel quale ovviamente le dimensioni dell'astro e la distanza dalla Terra non sono in scala (Fig.2). Per mettere in crisi questa convinzione si può suggerire una semplice "prova": se si chiede agli alunni di indicare la lampadina dell'aula si noterà che le braccia si disporranno in modo convergente verso un punto, invece indicando il Sole dal cortile della scuola, si osserveranno le braccia assumere direzioni parallele.

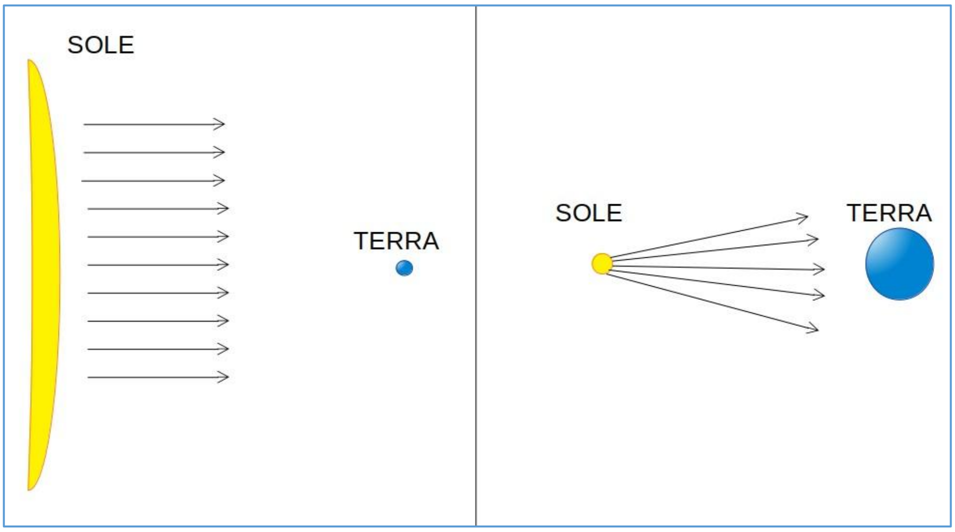


Fig.2 - Confronto tra un modello del sistema Sole - Terra con dimensioni in scala e raggi paralleli (a sinistra) e un modello ingenuo con raggi solari divergenti e Sole puntiforme (a destra).

Descrizione del laboratorio

Il laboratorio si può schematizzare in 8 fasi successive, indicate nella Tabella 1. Il livello di trattazione delle proposte può adattarsi alla scuola secondaria di primo grado, secondo e terzo anno, oppure a quella di secondo grado, con le opportune differenze.

Tabella 1: Schema delle attività con suggerimento degli ambienti e dei tempi

Fase	Ambiente	Attività	Tempi
A	Aula con schermo / LIM	Lezione partecipata	1 h
B	Cortile della scuola	Laboratorio	1 h
C	Aula con schermo / LIM	Lezione partecipata	1 h
D	Aula	Brainstorming	30'
E	Cortile della Scuola	Laboratorio	40'
F	Cortile della Scuola	Osservazione guidata	20'

G	Aula con schermo / LIM	Lavoro a gruppi	1 h
H	Aula con schermo / LIM	Lezione partecipata	1-2 h

Fase A

Le attività previste in questa fase di avvio sono:

– Presentazione a cura del docente: racconto storico, con problem posing e senza anticipare risultati e sviluppi;
– Visita del sito dell'esperimento e condivisione delle informazioni sull'evento "Eratosthenes" previsto per il successivo equinozio;
– Ricerca degli indizi della sfericità della Terra osservabili nell'antichità come oggi.

Il docente introduce la figura di Eratostene e la sua appartenenza alla Scuola di Alessandria, capitale culturale dell'antichità, che raccoglieva nella sua biblioteca le opere più importanti della matematica classica (Guedj, 2003). Osserva come egli fosse consapevole della sfericità della Terra, ben prima dell'impresa di Colombo di 1800 anni dopo. Con semplici osservazioni, gli studenti raccolgono "indizi" sulla sfericità della Terra: ad esempio, è esperienza comune a Genova, durante le giornate terse, riuscire a individuare a occhio nudo dalle alture della città, la Corsica sull'orizzonte del mare (Fig.3a), mentre è impossibile dalla spiaggia proprio a causa della curvatura sferica della superficie del mare.

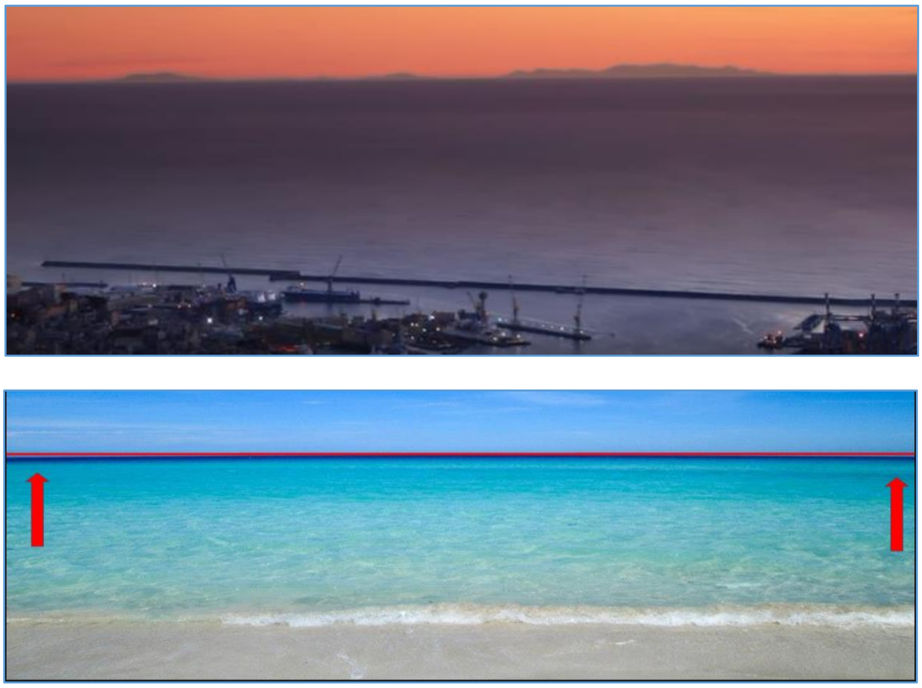


Fig. 3 - In alto (3a) vista della Corsica dalle alture di Genova. In basso (3b) linea dell'orizzonte curva, evidenziata dal confronto con un segmento rosso

Un altro indizio si ottiene osservando con attenzione la linea dell'orizzonte, che risulta essere curva, anziché rettilinea come potrebbe sembrare a prima vista (Fig.3b).

Successivamente viene descritta sommariamente l'esperienza di Eratostene che misurò il raggio della Terra ottenendo un valore incredibilmente vicino a quello oggi noto. Il procedimento si basava sull'osservazione che a mezzogiorno del solstizio d'estate il Sole si rispecchiava nell'acqua sul fondo di un pozzo a Siene (l'attuale Assuan, in Egitto), evidenziando la perpendicolarità dei raggi rispetto al suolo. Diversamente, nello stesso giorno dell'anno ed alla stessa ora, l'obelisco di Alessandria proiettava un'ombra che suggeriva una inclinazione dei raggi solari rispetto ad esso, dell'angolo θ o angolo allo zenit (Fig.4).

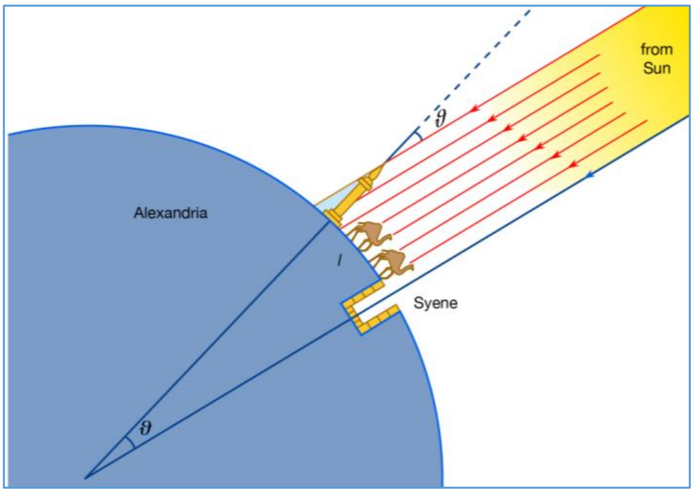


Fig. 4 – Schematizzazione delle osservazioni di Eratostene e della loro relazione con il raggio terrestre

Esempi di domande poste agli studenti: "Che differenza c'è tra i due casi?", "Cosa ci fanno capire le ombre?", "I raggi del Sole variano la loro inclinazione nei diversi punti della Terra?".
Infine, visitando il sito http://eratosthenes.ea.gr/ viene presentato l'evento dell'equinozio sottolineando la richiesta rivolta a numerose scuole del mondo di misurare l'ombra di uno gnomone al mezzogiorno locale del luogo in cui ci si trova e di pubblicare i dati per condividerli: è infatti lo scambio delle informazioni collegate ai dati locali a permettere l'analisi e la ricostruzione della misura del diametro terrestre.

Fase B

Questa ulteriore fase preliminare è finalizzata a condividere con gli alunni i concetti scientifici e geografici necessari alla costruzione di un adeguato modello matematico.
Si concentra l'attenzione sulla relazione fra ombre e orari: non è scontato che gli alunni abbiano consapevolezza del fatto che le ombre siano più lunghe all'alba e al tramonto e più corte attorno a metà giornata, anzi è capitato che ragazzi di 14 anni sostenessero con convinzione il contrario. In questi casi è risultato utile effettuare una verifica sperimentale, dedicando una giornata ad annotare le lunghezze delle ombre di un bastone piantato in cortile a differenti orari.
A questo fine, sono state necessarie alcune accortezze pratiche: trovare un punto del cortile della scuola esposto al Sole per tutta la giornata o quasi, collocarvi il bastone e stendere attorno ad esso un tovagliato bianco su cui annotare la posizione raggiunta dall'ombra della sommità del bastone ed il corrispondente orario, scegliere il giorno di maggior durata dell'orario scolastico e organizzare una turnazione affinché ogni ora due studenti uscissero per effettuare l'annotazione (ogni 20 minuti tra le 12 e le 14; l'opportunità di misure più frequenti è emersa dagli alunni in

un’occasione).

Fase C

In questa fase vengono rielaborate le osservazioni effettuate in cortile e ampliate con l’aiuto di internet.

L’osservazione delle annotazioni sul tovagliato, effettuata il giorno successivo con tutta la classe, ha consentito di:

- smentire le credenze errate senza fare ricorso all’autorità dell’insegnante;
- prendere maggior consapevolezza del funzionamento di una meridiana;
- determinare empiricamente l’orario di massima altezza del Sole sull’orizzonte, corrispondente alla lunghezza minima dell’ombra.

Questo ha favorito la nascita spontanea di un interrogativo sul concetto di mezzogiorno: per quale motivo il Sole risulta ad altezza massima intorno alle 13:20 e non alle 12:00? La ricerca della risposta ha consentito in modo naturale di riflettere sul concetto di ora legale estiva, che spiega la differenza di un’ora, e sulla differenza tra ora locale e ora del fuso orario, che spiega l’ulteriore differenza di circa 20 minuti: Milano e Genova si trovano più a Ovest del meridiano che individua l’ora convenzionale dell’Europa centrale il quale, in Italia, passa da Termoli ed attraversa Molise, Campania, Sicilia, mentre alla latitudini di Milano e Genova passa in Croazia (Fig.5).

Fig.5 – Il meridiano che individua l’ora convenzionale dell’Europa centrale passante per l’Italia.

In una classe le coordinate geografiche sono state ricavate con l’ausilio di Internet. Un tempo iniziale è stato necessario per interpretare le notazioni che comparivano a video, inizialmente incomprensibili per la totalità degli studenti, per esempio tradurre la scrittura *45°29'18.4" N 9°13'24.0" E* in “circa 9° E e 45° N” ha richiesto una decina di minuti in cui l’insegnante si limitava a sollecitare gli interventi.

Dalla successiva osservazione che la longitudine di Milano è circa 9° E rispetto al meridiano di Greenwich, si è sviluppata una lezione partecipata in cui gli studenti hanno:

- compreso che il meridiano di Greenwich nasce da una scelta convenzionale, perché essendo i meridiani circonferenze uguali non ne esiste uno privilegiato, a differenza dell'equatore che è la circonferenza massima tra i paralleli;
- -condiviso conoscenze che non tutti avevano: alcuni alunni non sapevano le coordinate geografiche associate al meridiano di Greenwich, oppure all'equatore o ai poli, altri pensavano che il simbolo ° a fianco delle coordinate rappresentasse una semplice abbreviazione del suffisso "esimo" per la numerazione ordinale invece che un grado d'angolo;
- ricordato che il fuso orario dell'Italia differisce da quello di Greenwich (universal time coordinated, UTC) per un'ora in più d'inverno (UTC + 1) e per due ore d'estate (UTC + 2), osservando che la nostra ora invernale si chiama CET (central european time) e quella estiva CEST (central summer european time);
- scoperto, guidati dalle domande dell'insegnante, che i meridiani corrispondenti a differenze di un'ora esatta distano fra loro di 360°/24=15° di longitudine;
- dedotto che Milano e Genova si trovano circa a 6° Ovest del meridiano che definisce il nostro fuso orario (vedi Fig. 5);
- congetturato che i circa 20 minuti di differenza tra l'ora individuata dalla meridiana e quella indicata dagli orologi d'inverno (CET) siano proporzionali alla suddetta differenza di longitudine;
- effettuato il calcolo 60 min x 6°/15° = 24 min, il cui risultato è stato correttamente interpretato come conferma della congettura.

Fase D

Un'ulteriore riflessione riguarda la scelta delle date in cui svolgere l'esperimento: perché gli equinozi?
Per rispondere a questa domanda occorre preliminarmente comprendere quali siano le proprietà astronomiche che individuano il giorno dell'equinozio. Un primo brainstorming fra gli alunni porta solitamente a individuare la seguente: "è il giorno in cui finisce l'estate (o l'inverno) ed inizia l'autunno (o la primavera)". Questa definizione non individua in realtà alcuna proprietà esplicita, a meno di aver già definito in modo indipendente dalle date le due stagioni richiamate. Un quesito chiarificatore è risultato essere il seguente: quale caratteristica accomuna tutti i giorni dell'estate, fino a quello prima dell'equinozio incluso, e non si verifica in nessun giorno dell'autunno?
Da questo quesito, o a volte dal brainstorming iniziale, o da un'analisi etimologica (la parola deriva dal latino *aequinoctium*, composta da *aequus* 'uguale' e *nox noctis* 'notte') emerge in genere una prima definizione operativa di equinozio, come giorno in cui la notte e il dì hanno uguale durata (12 ore) in qualsiasi luogo del mondo.
Da una ricerca su dizionario (un esempio di fonte consultabile su Internet è www.treccani.it) si ottiene invece una definizione di più difficile decifrazione per gli studenti: "Ciascuno dei due punti d'incontro dell'eclittica con il piano dell'equatore celeste, e anche ciascuno degli istanti in cui il Sole, percorrendo annualmente l'eclittica, passa per essi ".
Nessuna di queste consente di rispondere al quesito iniziale: per quale motivo per ripetere l'esperimento di Eratostene è stato scelto l'equinozio?

Per consentire agli studenti di scoprire la risposta autonomamente, risulta idoneo lo strumento del mappamondo parallelo, da presentare in occasione dell'uscita in cortile il giorno dell'equinozio o in data il più possibile prossima ad esso, su cui è incentrata la fase successiva.

Fase E

In questa fase è stato svolto l'esperimento vero e proprio, condotto dagli studenti inizialmente disposti in cerchio attorno alle attrezzature. Le tappe sono state:

- A cura dell'insegnante: preparare i materiali necessari per l'esperimento.
- A cura dell'insegnante: condurre la discussione sui dettagli pratici relativi all'esecuzione dell'esperimento (approssimazioni da compiere, precisione della misura, possibili errori …).
- A cura degli studenti: allestire il setting, manipolando gli strumenti a disposizione e collocandoli opportunamente per effettuare alcune prove di misura.

Fase F

L'uscita in cortile offre l'occasione per effettuare ulteriori osservazioni rese possibili dalla presenza del Sole. Con l'aiuto di una palla di polistirolo bianca e con un mappamondo privo di basamento è possibile stimolare la riflessione sulla posizione della Terra rispetto all'osservatore: il pianeta si trova interamente sotto i suoi piedi, omotetico a un mappamondo con la località in cui ci si trova posta allo zenit e con i poli orientati verso i rispettivi punti cardinali (Lorenzoni, 2009).

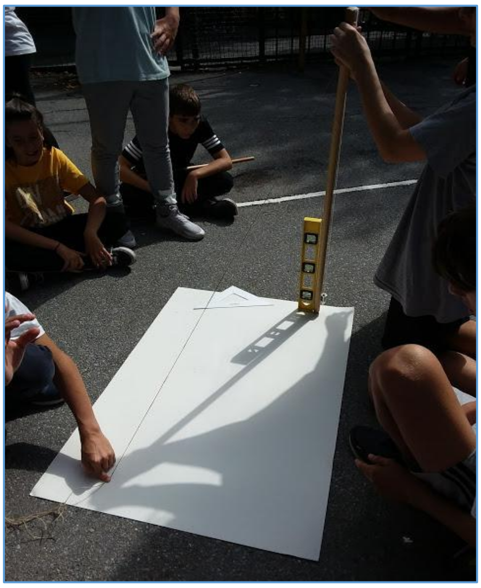
Fig.8 - Il mappamondo parallelo, utilizzato come modello per visualizzare il mezzogiorno locale attraverso le ombre osservabili in contemporanea.

Per individuare il Sud (e conseguentemente il Nord), in alternativa all'uso di una bussola, è possibile ricordare che, alle nostre latitudini, il Sole al mezzogiorno locale è orientato esattamente a Sud: un indizio, risultato efficace per gli alunni privi di conoscenze astronomiche, si trova nell'uso del termine Mezzogiorno per individuare il meridione italiano.
Il mappamondo così orientato, appoggiato su un contenitore a sezione circolare (un vasetto vuoto per piante o per alimenti, un rotolo di scotch) per conservare una posizione stabile, in un punto illuminato dal Sole, fornisce un ottimo modello del pianeta Terra nello stesso istante (Lanciano, 2003). Incollando su di esso, per esempio con l'aiuto di gommini adesivi, dei chiodini o degli stuzzicadenti in posizione perpendicolare alla superficie sferica, è possibile osservare la direzione

delle ombre in ogni punto della Terra, in particolare si può notare che al mezzogiorno locale dell'equinozio all'equatore non si vedono ombre (l'ombra è proiettata sotto la base d'appoggio del chiodino o dello stuzzicadenti) e dedurne che in quel giorno e in quel luogo il Sole è allo zenit (Fig. 8).
È stata così scoperta un'altra fondamentale, ma meno nota, proprietà astronomica degli equinozi che risulterà essenziale nella fase successiva.

- A cura degli studenti: visualizzare l'angolo allo zenit (indicato con θ in Fig.6b).

Come osservato nelle fasi B e C, per compiere la misura di Eratostene nel giorno dell'equinozio e puntualmente al mezzogiorno solare in una località come Genova o Milano con longitudine attorno ai 9° E, il setting è stato preparato alle 13:20 circa per l'equinozio d'autunno e alle 12:20 circa in primavera.
Sono stati utilizzati i seguenti strumenti: gnomone, metro (a nastro o pieghevole avvolgibile), gessetti, bolla o livella, filo a piombo, goniometro, squadra e spago. In particolare, il filo a piombo e la bolla sono stati impiegati per verificare la perpendicolarità dello gnomone rispetto al suolo, inoltre è stata posizionata una squadretta per meglio visualizzare tale condizione.



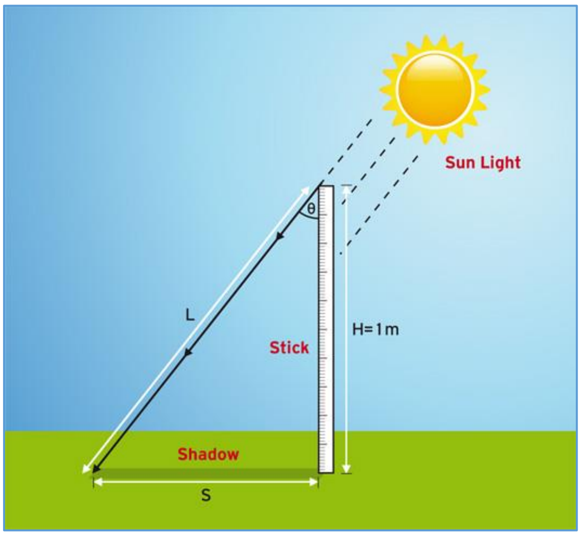


Fig. 6 - Il setting per l'esperimento di Eratostene (6a): è stato disposto un foglio bianco rigido sul pavimento del cortile per raccogliere interamente l'ombra del Sole e renderla più visibile, si notano poi lo gnomone, il filo a piombo, la bolla o livella, la squadretta e lo spago tenuto teso tra l'estremità dello gnomone e quella dell'ombra. Modellizzazione dello stesso setting (6b).

Conviene dare molta attenzione alle difficoltà pratiche di misura con strumenti niente affatto familiari anche se d'uso molto semplici e intuitivi, quali il filo a piombo e la bolla, affinché esse diventino l'occasione in cui gli studenti si pongano problemi e condividano le soluzioni. La discussione sui fattori che possono condizionare l'esito della misura aiuta a comprendere il significato dell'errore sperimentale: per esempio, la lunghezza dell'ombra cambia sensibilmente se la base e lo gnomone non sono ortogonali come si nota facilmente con l'aiuto della squadretta; se la misura viene presa su un prato, o in presenza di buche, oppure su una superficie pavimentata con mattonelle mal disposte o rotte, essa può risultare notevolmente falsata, per evitarlo si può disporre un pannello rigido, liscio e perfettamente piano, oppure un tovagliato bianco sul quale posare lo gnomone (Fig.6a).

Lo gnomone può essere di qualsiasi lunghezza, anche se i conti sono semplificati scegliendolo di lunghezza un metro (ad esempio, il metro in legno tradizionalmente impiegato nelle mercerie per la misura dei tessuti). Può essere interessante disporre di gnomoni di diversa lunghezza per ottenere una pluralità di dati che aiutino a individuare una relazione di proporzionalità diretta con le rispettive ombre.

Legando uno spago all'apice dello gnomone e tenendolo teso fino all'estremità dell'ombra, si visualizza il triangolo rettangolo da essi individuato e se ne misurano angoli e lati.

L'angolo θ compreso tra l'ipotenusa (lo spago) e il cateto (lo gnomone), che si osserva essere con buona approssimazione costante al variare della lunghezza degli gnomoni, rappresenta l'angolo allo zenit.

La suddetta osservazione può essere effettuata in modo più immediato confrontando gli angoli tra loro con l'aiuto di un foglio di carta piegato o ritagliato in modo da combaciare con uno di essi. Indirettamente, questa è anche un'evidenza del parallelismo dei raggi solari (Fig.6b).

Volendo offrire agli studenti una rappresentazione formale di quanto emerso, si possono riportare man mano che si compiono le misure, su un piano cartesiano precedentemente disegnato su carta millimetrata, le misure degli gnomoni (in ascissa) e delle ombre (in ordinata). Si può così riconoscere, nella disposizione dei punti allineati, la legge di proporzionalità diretta.

Per misurare l'angolo θ, si possono seguire diverse strategie, adattando il livello della trattazione in base all'ordine di scuola e alla classe.

Per la misura diretta, il comune goniometro risulta inadeguato, sia per la mancanza di un piano di appoggio, sia perché le sue ridotte dimensioni introducono un errore di misura tale da falsare completamente i dati (Fig.7a). Risulta quindi opportuno l'uso di uno strumento ad hoc: in alternativa all'acquisto in negozi specializzati di un goniometro adatto a misure in assenza di piano d'appoggio o alla sua costruzione in un laboratorio di falegnameria o di metallurgia, è possibile a costo zero (o quasi) costruire dei misuratori d'angolo rudimentali, utilizzando oggetti piani circolari con diametro fra i 20 e i 30 cm (per esempio dischi di cartoncino usati come basamenti per torte oppure piatti di portata in plastica), cartoncino, forbici e fermacampioni (Fig.7b).

Fig.7 - La misura diretta dell'angolo allo zenit, effettuata con un piccolo goniometro (7a) e con un misuratore d'angolo appositamente costruito (7b).

Il margine di errore nella misura diretta è comunque considerevole. Gli alunni suddivisi in gruppi possono scoprirlo osservando in corso d'opera le differenze che si ottengono modificando leggermente l'inclinazione dello gnomone, confrontando i dati ottenuti con gnomoni identici, facendo ripetere le medesime misure a gruppi di alunni diversi o anche agli stessi a distanza di un minuto, ecc.
L'occasione si presta a una riflessione, eventualmente condotta in un lavoro di gruppo, sulla possibilità di ridurre l'errore effettuando più misure e considerando la media dei risultati.

Fase G

Le attività qui proposte, che possono svolgersi in una normale aula o in qualsiasi altro luogo, permettono di determinare la lunghezza del meridiano terrestre ripercorrendo il ragionamento di Eratostene, scomponendo il procedimento in quattro passaggi:

1. determinazione della misura dell'angolo allo zenit θ con la massima precisione possibile;
2. scoperta e/o dimostrazione dell'uguaglianza fra l'angolo misurato e l'angolo di latitudine;
3. ricerca della distanza fra la propria scuola e la "scuola gemella" oppure fra la propria scuola e l'equatore;
4. calcolo della lunghezza del meridiano terrestre a partire dai dati ricavati in precedenza.

Un'opzione utile sia per ridurre i tempi, sia per stimolare un maggiore impegno degli alunni, si è rivelata quella di suddividere la classe in gruppi, assegnando ad ogni gruppo lo sviluppo di uno dei passaggi precedenti, con il compito di esporre gli esiti del proprio lavoro a tutta la classe nell'ora successiva.

Determinazione dell'angolo allo zenit

Come già osservato, la misura diretta dell'angolo ottenuta nella Fase E, è poco precisa. Un valore più accurato si può ottenere con una procedura indiretta, a partire dalle lunghezze dei lati del triangolo gnomone-ombra-filo.
Al gruppo di alunni incaricato di determinare la misura dell'angolo θ si può dare un'ampia libertà di ricerca, lasciando aperta la possibilità di utilizzare uno qualsiasi dei concetti matematici sotto elencati:

- congruenza fra triangoli;
- similitudine fra triangoli;
- proprietà del triangolo rettangolo isoscele;
- funzioni goniometriche.

L'insegnante può fornire qualche consiglio in corso d'opera se necessario, oppure dare un indizio o una traccia di lavoro iniziale. Qui ci limitiamo a indicare alcuni possibili esiti.
Congruenza fra triangoli.
Gli alunni disegnano sul pavimento, su un foglio di carta di dimensioni adeguate, un triangolo rettangolo con le misure rilevate in cortile (scala 1:1). Successivamente misurano con un normale goniometro l'angolo cercato: esso ha la stessa ampiezza dell'angolo θ osservato in cortile per un criterio di congruenza fra triangoli.

La presenza di un dato sovrabbondante, la lunghezza dell'ipotenusa, facilita il disegno e riduce considerevolmente i margini di errore o l'individuazione di dati platealmente errati.
La ripetizione dell'operazione per diversi triangoli ottenuti in cortile, con gnomoni di altezze differenti, fornisce una conferma del risultato (o l'individuazione di errori rilevanti) e consente di ridurre i piccoli errori di misura tramite il calcolo della media aritmetica delle misure ottenute per l'angolo θ.
Similitudine tra triangoli.

Gli alunni eseguono dei disegni in scala del triangolo misurato in cortile, individuando un fattore di riduzione (generalmente compreso fra 1:5 ed 1:20) oppure effettuando un più intuitivo cambiamento di unità di misura da metri a decimetri o da centimetri a millimetri, equivalente a una riduzione 1:10 (per esempio un'altezza reale di 115 centimetri viene rappresentata con un segmento di 11,5 centimetri). La proprietà sfruttata è uno dei criteri di similitudine fra triangoli, o più informalmente il concetto di ingrandimento in scala.
Una ulteriore possibilità, che richiede una maggior padronanza dell'argomento, è rappresentare lo gnomone con una lunghezza arbitraria, ricavare il rapporto di riduzione ed utilizzarlo per calcolare le lunghezze ridotte degli altri due lati del triangolo.
Valgono le medesime considerazioni del caso della congruenza in merito alla presenza di un dato sovrabbondante ed alla possibilità di ridurre l'errore calcolando la media aritmetica.
Proprietà del triangolo rettangolo isoscele.

Alle latitudini di Milano e Genova si ha una situazione molto particolare, che si scopre svolgendo l'attività: la misura dell'ombra al mezzogiorno locale dell'equinozio è circa uguale alla lunghezza dello gnomone. Quest'osservazione può sfuggire ad alunni poco abituati ad approssimare (per esempio, per alcuni studenti le lunghezze 99,8 cm e 100,1 cm sono da considerare molto diverse perché non hanno neanche una cifra in comune), ma generalmente emerge nel lavoro di gruppo. Se ne deduce che i triangoli costruiti in cortile sono, con buona approssimazione, triangoli rettangoli isosceli. Ricordando o riscoprendo le peculiarità di tale figura geometrica, si giunge alla conclusione che l'angolo cercato misura approssimativamente 45°.
Funzioni goniometriche.

Nelle classi di scuola secondaria di secondo grado in cui siano già state introdotte le funzioni goniometriche, è possibile applicare, se sono già stati svolti i tradizionali esercizi di risoluzione dei triangoli rettangoli, o scoprire con un'attività di problem solving mirata la formula per determinare un angolo acuto del triangolo rettangolo conoscendo i lati. Con riferimento all'angolo θ, oggetto delle attività precedenti, si ottiene:

$$\tan\theta = \frac{ombra_{gnomone}}{altezza_{gnomone}} \quad \text{da cui} \quad \theta = \arctan\left(\frac{ombra_{gnomone}}{altezza_{gnomone}}\right)$$

L'angolo può quindi essere calcolato con una normale calcolatrice scientifica, ottenendo un risultato di maggior precisione rispetto a quello ricavabile con i metodi descritti in precedenza.
Tale formula è fornita anche dal sito https://eratosthenesexperiment.ea.gr nel menu "LESSON PLANS", tuttavia a nostro avviso è didatticamente inopportuno utilizzarla con alunni che non siano in grado di comprenderne il significato, ai quali è preferibile proporre uno degli altri metodi.

Uguaglianza tra angolo misurato e angolo di latitudine

Un secondo gruppo può essere incaricato della ricerca e/o della dimostrazione della relazione esistente fra l'angolo determinato dal primo gruppo e l'angolo al centro della Terra delimitato dal raggio passante per la propria località e da quello passante per l'equatore alla stessa longitudine (vedi Fig.4). A seconda della classe può essere opportuno o meno dedicare una lezione preliminare a ripassare (se già studiata) o a scoprire/argomentare le proprietà degli angoli formati da una trasversale a due rette parallele. Nelle attività in cortile dovrebbe essere già stato evidenziato il parallelismo dei raggi solari.

Con queste premesse, agli studenti può essere richiesto di rappresentare schematicamente in un unico disegno (Fig.9):

- una sezione circolare della Terra corrispondente al meridiano passante per la propria località;
- il centro della Terra C;
- la propria località P;
- il corrispondente punto Q dell'equatore (di cui un altro gruppo deve scoprire la distanza);
- lo gnomone perpendicolare al suolo in P (enormemente ingrandito rispetto alla scala del disegno, per esigenze di visualizzazione);
- lo gnomone perpendicolare al suolo in Q (anch'esso enormemente ingrandito rispetto alla scala del disegno);
- i raggi solari (paralleli fra loro) al momento del mezzogiorno locale nel giorno dell'equinozio in cui risultano perpendicolari al suolo in Q;
- l'angolo formato dai raggi solari con lo gnomone in P, ovvero l'angolo θ misurato in cortile.

Costruendo la figura e ragionando su di esso, gli alunni possono congetturare e successivamente argomentare/dimostrare l'uguaglianza fra l'angolo θ e l'angolo al centro della Terra PCQ. Una osservazione conclusiva riguarda il fatto che tale angolo indica esattamente, per definizione, la latitudine della località P.

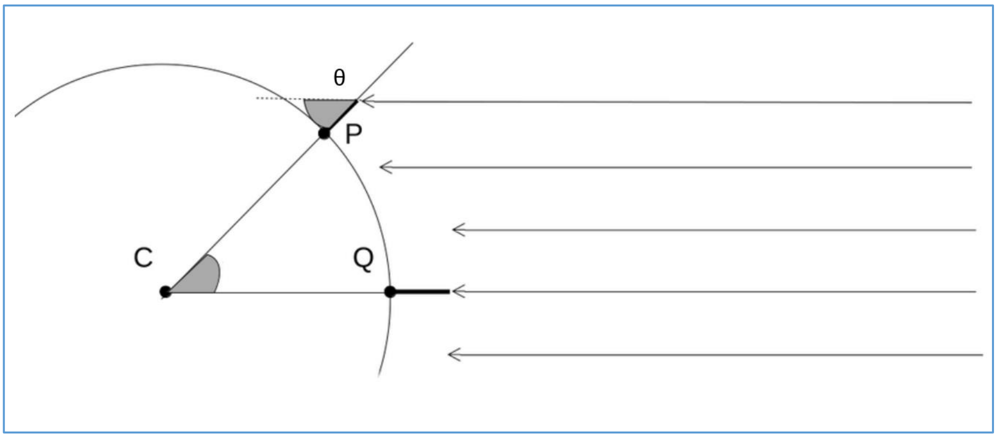


Fig. 9 - Disegno del modello geometrico utilizzato da Eratostene.

I principali errori osservati nello svolgimento di quest'attività, entrambi formativi nel percorso didattico, sono:

- non allineamento, nel disegno, del raggio terrestre CQ e del raggio solare passante per Q, con conseguente impossibilità di visualizzare le rette parallele a cui applicare la proprietà degli angoli alterni interni;
- confusione fra i due angoli acuti del triangolo rettangolo (l'angolo θ nel disegno è stato confuso con il suo complementare), ostacolando la corretta individuazione degli angoli alterni interni.

Per favorire la riflessione sul primo errore è risultato utile proporre un quesito sulla definizione della retta perpendicolare a una circonferenza.

Ricerca della distanza tra scuole gemelle

Un gruppo di studenti deve trovare la distanza tra la scuola di appartenenza e l'equatore usando internet.
Per stabilire la distanza tra Alessandria e Siene, Eratostene, che era anche un sapiente geografo, si era avvalso delle conoscenze del suo tempo, fondate sui viaggi dei mercanti e sugli studi degli scribi per i faraoni (Russo, 2008).
Oggi per stabilire la distanza fra due località è possibile avvalersi di atlanti cartacei ed elettronici, in particolare i navigatori e i siti di informazione turistica consentono di trovare in pochi secondi la distanza tra due città note. Con gli stessi strumenti è possibile verificare se le due località considerate abbiano la stessa longitudine, ovvero si trovino sullo stesso meridiano.
Meno semplice è determinare la distanza di una città dall'equatore: qui entrano in campo una difficoltà concettuale (la nozione di distanza) ed una difficoltà tecnologica (la maggior parte dei siti che consentono di calcolare distanze richiedono di inserire i nominativi di due località da collegare) che inducono frequenti errori (Fig.10).

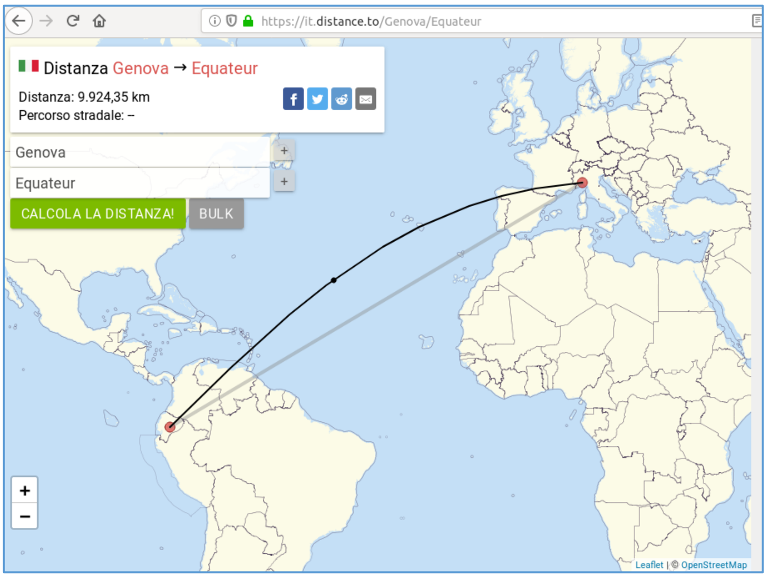


Fig.10 - Esempio di sito che calcola le distanze terrestri, in realtà fornisce una distanza tra due località da collegare: invece che la linea dell'equatore mostra l'Ecuador facendo incorrere in errori.

Per questo risulta didatticamente significativo proporre agli alunni la ricerca tramite Internet della distanza fra la propria località e l'equatore. Un'indicazione utile per le successive attività di confronto, analisi delle fonti utilizzate e degli errori commessi, è quella di stampare o salvare su file la schermata in cui si è ottenuta la risposta, possibilmente con la visualizzazione della linea che rappresenta la distanza cercata sullo sfondo della carta geografica o porzione di mappamondo coinvolta (Fig. 10).

L'uso inconsapevole di Internet porta numerosi alunni a trovare, in prima istanza, misure macroscopicamente errate; il confronto tra alunni e la riflessione sugli errori guidata dall'insegnante, consentono sia di approfondire il concetto di distanza, sia di acquisire consapevolezza dei rischi connessi all'uso fideistico dei motori di ricerca; interessante è inoltre prendere confidenza con alcune funzioni secondarie rese disponibili dai navigatori.

La distanza fra due punti sul piano si associa in modo abbastanza naturale alla lunghezza di un segmento. La distanza fra una città (per esempio Milano o Genova) e l'equatore è un arco di circonferenza massima che è proprio il percorso più breve per collegare due punti su una sfera.

Calcolo della lunghezza del meridiano terrestre

Per trovare la lunghezza del raggio terrestre, Eratostene utilizzò la distanza tra Alessandria e Siene che, secondo le sue conoscenze, si trovavano approssimativamente lungo lo stesso meridiano e distavano circa 5000 stadi: la misura era stata effettuata a passi, dettaglio che rende il risultato ottenuto ancora più incredibile. Il valore esatto dello stadio è ancora oggi oggetto di dibattito, come pure il fatto che Eratostene sapesse ed avesse tenuto conto che Alessandria e Siene non fossero esattamente sullo stesso meridiano (Russo, 2008). In ogni caso, tutte le fonti concordano sul fatto che il risultato finale della lunghezza fosse, per quell'epoca, incredibilmente vicino alla misura nota oggi. (Fischer, 1975).

La latitudine di Alessandria era risultata di 7.2°, cioè 1/50 di angolo giro. Da questo Eratostene dedusse che la circonferenza della Terra fosse 50 volte la distanza tra Alessandria e Siene, quindi 250.000 stadi; tenuto conto che uno dei valori noti per lo stadio è di 156 m, si ottengono 39.000 km per la lunghezza del meridiano terrestre, dato straordinariamente vicino alla misura attuale di 40.075 km.

Se si vuole replicare la misura di Eratostene, quindi, occorre una seconda città lungo lo stesso meridiano del luogo dell'esperimento, rispetto alla quale misurare la distanza. Possiamo così apprezzare la felice proposta del sito Eratosthenes Experiment: mettere in contatto tutte le scuole del mondo partecipanti all'evento, con la condivisione da parte di ciascuna delle proprie coordinate geografiche, allo scopo di scoprire la propria "scuola gemella". In mancanza di quest'ultima, occorrerà stimare la distanza tra la scuola e un punto preso sull'equatore, come già spiegato.

Nella corrispondenza con la scuola gemella, vanno comunicate le misure relative al triangolo rettangolo ricavate in cortile e quella dell'angolo allo zenit.

Il calcolo compiuto da Eratostene si fondava sulle osservazioni geometriche già richiamate e sulla proporzionalità tra archi di circonferenza e rispettivi angoli al centro.

In questo caso, l'arco è la distanza tra scuole gemelle ($Scuola_1$ e $Scuola_2$) e l'angolo al centro si ottiene dalla differenza fra gli angoli allo zenit ottenuti dalle due scuole che indichiamo con θ_1 e θ_2 nella successiva espressione:

$$\textit{Meridiano} : \textit{distanza} \ (Scuola_1; Scuola_2) = \ \textit{Angolo giro} : (\theta_1 - \theta_2)$$

Fase H

Durante l'esperimento si possono effettuare fotografie e videoriprese per documentare le varie attività (Fig.11) e disporre in seguito di materiale per la discussione in aula; il sito Eratosthenes Experiment incoraggia l'invio di fotografie con l'indizione di un concorso per le scuole.

Fig.11 - Preparazione all'esperimento di Eratostene 2018 nel campetto sportivo (a sinistra) e sul terrazzo della Scuola (a destra) a Genova.

Nelle diverse edizioni, il sito ha messo a disposizione degli insegnanti strumenti online per la condivisione di dati e fotografie, come per esempio PadLet o una mailing list di tutti i referenti di scuola. Le scuole gemelle hanno potuto così abbinarsi e scriversi per scambiare i dati, ottenendo risultati tanto più precisi quanto più le scuole erano distanti (se l'arco di meridiano è maggiore, si minimizza l'errore).

È formativo proporre agli studenti la redazione della mail indirizzata alla scuola gemella, da scriversi in inglese (Tab.2): con questa semplice azione viene valorizzato il carattere comunitario del fare scienza, l'importanza dello scambio delle informazioni e della loro discussione, la responsabilità di fornire il proprio contributo. Molte scuole allegano fotografie del gruppo classe ripreso durante le attività: gli studenti sono molto incuriositi nel vedere i volti, i luoghi, gli strumenti e le strategie di misura messe in atto dai loro pari anche quando provenienti da scuole di diverso grado o indirizzo curricolare.

Tabella 2: Esempio di una email inviata agli insegnanti della community di Eratosthenes Experiments 2018, delle scuole situate a longitudine tra i 3°E e i 15°E per facilitare lo scambio dei dati e individuare le scuole gemelle (Genova e Sao Tomé).

Scambio di email tra scuole gemelle
Eratosthenes experiment: may the SUN be with you! Dear all, I'm Angelos Lazoudis, I would like to thank you for registering on our website for the Eratosthenes Experiment. Please find attached an excel file with the schools (and contact persons) that are located at a longitude between +3 to +18
Hello

I'm André Freitas, a Physics teacher from São Tomé.
I got your name thanks to the list sent by Angelos Lazoudis, for the Eratosthenes experiment. We are nearly on the same meridian, and I would like my students to share this experience with yours. They are 14-18 years old. What about yours? Best regards

Hello
I'm Stefania Donadio, a mathematics teacher from Genoa (44.4 N, 8.9 E, Italy). We are very happy to share this experience with you. My students are younger than yours (11-13 years old), but they would be really excited to be in touch with you.

length of stick (m)	shadow (m)	angle (deg)
1,61	1,58	44,5
1,64	1,62	44,7
1,47	1,43	44,2
1,00	0,98	44,4

Best regards!

Materiali di lavoro - Schede

Nella tabella seguente (Tab.3) sono riportate le consegne per gli studenti suddivisi in gruppi di lavoro nella Fase G, suddivise in base al grado di scuola. Si osservi che la riflessione richiesta è sempre la stessa, indipendentemente dalle consegne.

Tabella 3: Le consegne per gli studenti nel lavoro a gruppi

Grado di scuola / Fase	Consegna per il gruppo	Riflessione richiesta alla fine dell'attività
Secondaria di I grado (Fase E)	A partire dalle misure effettuate con il goniometro, determinate la misura dell'angolo θ. Se volete, aiutatevi con un disegno.	Quali sono le conoscenze di matematica che vi sono servite per questa attività? Quali strumenti avete utilizzato?
Secondaria di I grado o II grado / (Fase G1)	A partire dalla misura dei lati del triangolo, trovate la misura dell'angolo θ. Se volete, aiutatevi con un disegno.	Quali sono le conoscenze di matematica che vi sono servite? In particolare, quali definizioni, teoremi o proprietà geometriche? Quali strumenti (materiali, digitali o online) avete utilizzato?
Secondaria di II grado, triennio / (Fase G1, con esclusione del punto d)	A partire dalla misura dei lati del triangolo, senza utilizzare la trigonometria, come trovereste la misura dell'angolo θ. Se volete, aiutatevi con un disegno.	IDEM

Secondaria di I grado o II grado / (Fase G2)	Supponendo di avere già determinato l'angolo θ, dimostrate che ha la stessa misura dell'angolo al centro della Terra, che esprime la latitudine del luogo. Se volete, aiutatevi con un disegno.	Quali sono le conoscenze di matematica, di geografia o di astronomia che vi sono servite? In particolare, quali definizioni, teoremi o proprietà geometriche? Quali strumenti (materiali, digitali o online) avete utilizzato?
Secondaria di I grado o II grado / (Fase G3)	Trovate la distanza della vostra Scuola dall'equatore, usando internet. Trovate la distanza della vostra Scuola da quella di una "scuola gemella".	Quali sono le conoscenze di matematica o di geografia che vi sono servite? In particolare, quali definizioni o proprietà geometriche? Quali strumenti (materiali, digitali o online) avete utilizzato?
Secondaria di I grado o II grado / (Fase G4, senza scuola gemella)	Supponendo di avere determinato l'angolo θ e di conoscere la distanza del luogo in cui siamo dall'Equatore, trovate la misura della circonferenza terrestre. Se volete, aiutatevi con un disegno.	Quali sono le conoscenze di matematica, di geografia o di astronomia che vi sono servite? In particolare, quali definizioni, teoremi o proprietà geometriche? Quali strumenti (materiali, digitali o online) avete utilizzato?
Secondaria di I grado o II grado / (Fase G4, con scuola gemella)	Supponendo di avere determinato l'angolo θ in due località diverse lungo lo stesso meridiano e di conoscere la distanza tra tali località, trovare la misura della circonferenza terrestre. Se volete, aiutatevi con un disegno.	IDEM

Misconcetti e spunti di approfondimento

Vogliamo qui soffermarci nella discussione di tre questioni delicate dal punto di vista scientifico e didattico, in quanto possibili fonti di confusione o misconcetti.

La prima riguarda l'assunzione della sfericità della Terra. Le misure effettuate da Eratostene sono sufficienti per dimostrarla? In realtà non basta confrontare la diversa inclinazione delle ombre in due punti diversi, che sarebbe compatibile con un modello di Terra piatta (Fig.12).

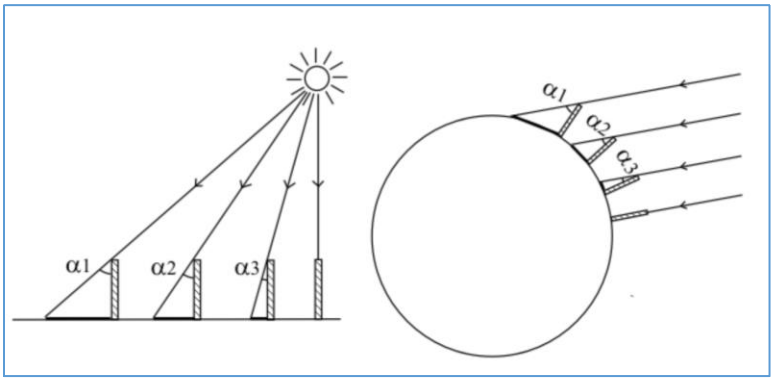


Fig.12 - Schema che mostra che il risultato ottenuto da Eratostene è compatibile sia con un modello di Terra piatta (a sinistra) sia con un modello di Terra sferica (a destra).

Essendo necessari tre punti non allineati per costruire una circonferenza, Eratostene avrebbe dovuto considerare un terzo punto di osservazione sullo stesso meridiano, oltre al pozzo di Siene e all'obelisco di Alessandria, per verificare l'esistenza di una curvatura. È probabile che questa verifica non sia stata ritenuta necessaria da Eratostene, perché il fatto che la Terra fosse sferica era già stato acquisito grazie agli studi di Aristotele. In essi, infatti, si usano come prove della sfericità della Terra, l'ombra circolare proiettata sulla Luna durante un'eclisse e il fatto che alcune stelle visibili dall'Egitto scomparivano alla vista dell'osservatore che si spostava verso nord (Amaldi, 2012, Ballesteros, 2019).

La seconda questione riguarda il concetto, nient'affatto banale, di distanza. Anche in questo caso, la definizione dipende dal modello geometrico.

Nel piano, gli studenti non hanno alcun problema nel visualizzare la linea più breve che connette due punti, mentre sulla superficie di una sfera incontrano molte più difficoltà nel farlo, poiché non è ovvio che le distanze siano archi di circonferenza massima e non è facile passare da una rappresentazione mentale di Terra piatta, rinforzata dall'utilizzo scolastico delle cartine geografiche e dei disegni bidimensionali sul quaderno, ad un modello curvo. Un modo per facilitare tale passaggio, è l'osservazione delle traiettorie dei voli aerei internazionali, che devono avere una minima durata per ovvie ragioni. Ebbene, i voli tra città situate alla stessa latitudine, come ad esempio Pechino (39° N) e New York (40° N), avvengono lungo traiettorie che passano curiosamente nei pressi del Polo Nord e non seguono i paralleli; la spiegazione è che essi (ad eccezione dell'equatore) non sono circonferenze massime. Viceversa, le traiettorie dei voli tra città che si trovano alla stessa longitudine, come ad esempio San Pietroburgo e Antalya (entrambe 30° E), seguono il meridiano, che infatti è una circonferenza massima.

La terza questione riguarda l'utilizzo di diversi modelli della Terra, scelti in base alla trattazione che si vuole affrontare:

– Il mappamondo come reticolato geografico. È un modello che permette di porre l'attenzione su definizioni e proprietà di meridiani e paralleli e sulle misure degli angoli di latitudine e longitudine. In molte sue immagini (si veda la Fig.1) non si tiene conto dell'inclinazione dell'asse terrestre rispetto al piano dell'eclittica (niente affatto trascurabile, pari a circa 23° 27'), per facilitare la lettura delle informazioni riportate. È importante però evidenziare questo aspetto, responsabile dell'alternarsi delle stagioni e quindi delle condizioni di equinozio e solstizio che sono alla base dell'esperimento.

- La Terra come sistema di riferimento dell'osservatore. La diversa lunghezza delle ombre, che viene sfruttata sia durante la misura, sia nella costruzione della meridiana per l'individuazione del mezzogiorno solare, è un fenomeno dovuto al moto del Sole rispetto al punto di osservazione del cortile. In proposito, in risposta allo stereotipo studentesco che tale moto non esista perché viene appreso alla scuola primaria che sia la Terra a muoversi, è bene precisare che il Sole, descrivendo nel cielo un arco dall'alba al tramonto, è effettivamente in moto rispetto alla posizione in cui siamo: il fenomeno osservato non è "sbagliato", è semplicemente relativo.
- Inoltre è bene far notare che in questa attività molte considerazioni si basano sugli effetti del moto di rotazione giornaliero (ad esempio, la definizione di mezzogiorno locale), altre sul moto di rivoluzione annuale (ad esempio la definizione di equinozio) (Fig.13).

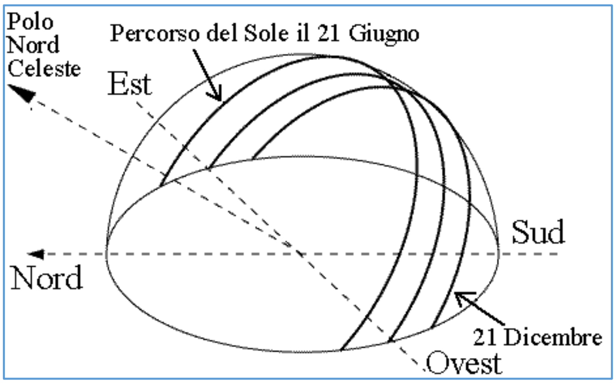


Fig.13 - Archi che descrivono il percorso del Sole nel cielo, con evidenziate le differenze tra le condizioni estive (percorso più lungo e giorno più lungo) e invernali (viceversa, percorso più breve e giorno più breve).

In sintesi, è preferibile esplicitare di volta in volta quale sia il modello o il sistema di riferimento seguito senza lasciarli sottintesi, per evitare che gli studenti interpretino in termini assoluti quello che è un punto di vista relativo.

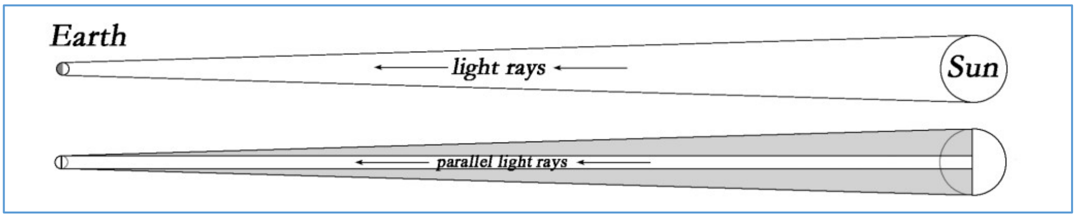


Fig.14 - Schema del modello di Aristarco che evidenzia la differenza rispetto ad un modello con raggi solari paralleli. Tale differenza risulta minore di 1°.

- Il sistema Terra-Sole in scala. Come già discusso nei paragrafi precedenti, una delle assunzioni di Eratostene è che i raggi del Sole giungano paralleli sulla Terra, secondo un modello che vede il Sole ad una distanza così grande da essere schematizzata come infinita (Russo, 2008). Aristarco, di poco precedente ad Eratostene, aveva stimato il diametro del Sole come 109 volte quello terrestre e la sua distanza in ben 1200 diametri terrestri. Uno studio trigonometrico (Walkup, 2005) mostra che la differenza tra la direzione parallela dei raggi e quella che si ottiene in un modello con queste proporzioni è al di sotto di 1°, il che rende la condizione di parallelismo un'assunzione ragionevole (Fig. 14).

Possibili sviluppi

Nelle attività qui proposte, i modelli geometrici utilizzati sono tutti bidimensionali, dando per scontato che si tratti di sezioni dello spazio tridimensionale (il triangolo rettangolo perpendicolare al suolo) o in particolare di una sfera (il meridiano).

Un possibile sviluppo della parte più laboratoriale, suggerito da F. Lorenzoni in una recente edizione dell'Officina Matematica presso la casa laboratorio di Cenci (per maggiori informazioni si veda http://www.cencicasalab.it/), può essere la costruzione di modelli tridimensionali della sfera terrestre, per visualizzarne le sezioni: ad esempio, si può utilizzare una sfera in polistirolo (quelle per il patchwork) ed effettuare dei tagli, oppure disegnare su una sfera in materiale trasparente (plastica).

Un'altra possibilità di modellizzazione tridimensionale è costruire su un piano di materiale flessibile (plastica, cartoncino resistente) un modellino dell'obelisco e del pozzo e riprodurre con l'aiuto del Sole le ombre che si ottengono incurvando il piano (si veda, ad esempio, il video di Carl Sagan https://www.youtube.com/watch?v=G8cbIWMv0rI).

Dal punto di vista storico-matematico, l'esperimento può avere uno sviluppo naturale, infatti la lunghezza del meridiano terrestre è stata utilizzata per la prima definizione del metro campione alla nascita del sistema metrico decimale.

Anche in questo caso l'argomento può essere introdotto a partire da un episodio storico avvincente e si presta ad approfondimenti scientifici e matematici, per esempio il metodo della *triangolazione* per la misura delle distanze.

L'esigenza di definire un sistema di misura universale, ricavato da parametri non soggetti all'arbitrio umano, nasce nel 1792 in Francia grazie allo spirito illuminista che guidava la rivoluzione francese: il governo rivoluzionario incaricò la comunità scientifica, attraverso l'Accademia delle Scienze, di individuare un procedimento per definire il metro campione.

In quel contesto, le grandezze della natura considerate oggettive, universali e immutabili, risultavano un ottimo contraltare ai sistemi di riferimento basati sul corpo del monarca (ad esempio pollice, piede, braccio) tipici dell'assolutismo. Dopo ampie discussioni fu quindi deciso di definire il metro come decimilionesima parte dell'arco di meridiano compreso fra il Polo Nord e l'Equatore (e passante per Parigi). La misura dell'arco fu ottenuta con il metodo della triangolazione, ad opera dei due astronomi Pierre Méchain e Jean-Baptiste Delambre, durante una spedizione avventurosa e rocambolesca, che durò ben 7 anni in mezzo alle vicende militari conseguenti alla rivoluzione francese (Guedj, 2004).

Conclusioni

L'attività qui proposta è basata sulla riproduzione di un esperimento storico, da svolgersi a scuola nei giorni prossimi all'equinozio, fra il 16 e il 26 di marzo o di settembre: si tratta del celebre esperimento di Eratostene per la misura del meridiano terrestre, da effettuarsi in locali all'aperto, sul terrazzo, nel cortile o in un campo sportivo, con la partecipazione degli alunni e

degli insegnanti. L'esperimento in sé ha la durata di un'ora circa, se si vuole progettare una presentazione nelle classi per porre il problema, incuriosire gli studenti, lanciare l'attività e poi prevedere una ripresa successiva per la discussione dei risultati, la sistemazione e formalizzazione dei concetti, bisogna considerare un tempo totale di almeno 7 ore.
L'esperimento di Eratostene, per i concetti matematici in gioco, si presta a trattazioni di differente livello, dagli ultimi anni della scuola primaria fino agli ultimi anni della secondaria di secondo grado. Esso mostra la potenza del metodo scientifico capace di risolvere problemi complessi con metodi semplici. In particolare, utilizza un modello matematico con grandezze fisiche e geometriche che assumono immediatamente significato agli occhi degli studenti perché applicate nella realtà. Durante il percorso, gli alunni:

- Allestiscono un laboratorio attivo e multidisciplinare per risolvere un problema reale.
- Scoprono la necessità della raccolta dei dati, della loro lettura e analisi, del seguire con cura le procedure.
- Costruiscono strumenti e gestiscono difficoltà impreviste ed errori di misura.
- Riflettono sull'utilizzo consapevole degli strumenti più semplici come delle tecnologie per la ricerca delle informazioni.
- Percepiscono l'utilità dei teoremi (proprietà del cerchio, degli angoli) e di relazioni matematiche quali proporzionalità, perpendicolarità e parallelismo.
- Costruiscono i significati di meridiano, parallelo, coordinate geografiche, mezzogiorno locale, fuso orario ed equinozio.
- Partecipano ad un esperimento comunitario, organizzato in diverse scuole del mondo ed eseguito in contemporanea, vivendo l'importanza del dibattito e dello scambio delle informazioni nella comunità scientifica.

La misura del meridiano, determinata a conclusione delle attività è sorprendentemente vicina a quella che si può trovare su libri di testo, enciclopedie e in rete; lo stupore per il risultato di questo esperimento fu grande anche nel mondo antico, infatti è rimasta celebre la definizione di Plinio il Vecchio di «impresa inaudita ma così semplice che è impossibile non credergli» (Amaldi, 2012).

Contributo degli autori

Entrambi gli autori hanno contribuito all'ideazione dello studio e alla scrittura del manoscritto. L'esperienza è stata presentata e discussa nella sezione laboratori al XXXV Congresso UMI-CIIM 2018 a Cagliari il 4 ottobre 2018.

Dichiarazione di conflitti di interesse

Gli autori dichiarano di non avere conflitti di interesse rispetto la paternità o la pubblicazione di questo articolo.

Ringraziamenti

Ringraziamo la prof.ssa Lucia Stelli della CIIM che ci ha suggerito di proporre questo laboratorio al Convegno UMI del 2018, la dottoressa Rosa Gini per i preziosi consigli che ci ha dato per una prima revisione dell'articolo ed i ragazzi delle nostre classi che hanno partecipato attivamente e con curiosità. Siamo debitori nei confronti del progetto Globolocal (www.globolocal.net), del gruppo di Pedagogia del Cielo del MCE ed in particolare di Nicoletta Lanciano, Rita Montinaro, Franco Lorenzoni ed Enrica Giordano, per l'idea di mappamondo parallelo e per le formazioni con attività all'aperto dedicate ai concetti di mezzogiorno locale, latitudine, meridiano e ai modelli tridimensionali.

Note

1) Per approfondimenti sul modello del "mappamondo parallelo" si veda, per esempio, il sito di presentazione del progetto Globolocal – Movimento per la liberazione dei mappamondi:
http://www.globolocal.net/progetto.html
2) Per ulteriori informazioni sulla Casa Laboratorio di Cenci e sulle attività di formazione da essa proposte, si veda il sito: http://www.cencicasalab.it/

Bibliografia

Amaldi U., (2012). *Le traiettorie della fisica.* Zanichelli, Bologna.

Ballesteros F. J., (2019), *Misurare il cielo e la terra*, Achet, pp. 7-19.

Crease R. P., (2007). *Il prisma e il pendolo. I dieci esperimenti più belli nella storia della scienza*, Longanesi.

Fischer, I. (1975). Another look at Eratosthenes' and Posidonius' determinations of the earth's circumference. *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society*, 16, 152-167.

Guedj D., (2003), *La chioma di Berenice*, TEA.

Guedj D., (2004), *Il metro del mondo*, Longanesi & C., pp. 68-71.

Lanciano N. (2003). *Strumenti per i giardini del cielo*. Quaderni di cooperazione educativa, ed. Junior, pp. 50-59.

Lorenzoni F., (2009). *Con il cielo negli occhi. Imparare a guardare lo spazio e il tempo giocando*, La Meridiana eds.

Russo L. (2008). *La rivoluzione dimenticata. Il pensiero scientifico greco e la scienza moderna*. Feltrinelli, pp. 90- 95, pp. 312 - 317.

Walkup N. (2005), *Eratosthenes and the Mystery of the Stades*, University of Missouri. http://historyofmathematics.org/wp-content/uploads/2013/09/2005-Walkup.pdf consultato il 15/05/2020.

https://www-spof.gsfc.nasa.gov/stargaze/Isky.htm consultato il 15/05/2020.

Gli Autori

Massimo Trizio
IIS Caterina da Siena
Viale Lombardia 89, 20131, Milano, Italia
E-mail massimo.trizio@gmail.com

Laureato in matematica, ha insegnato nella secondaria di primo e di secondo grado. Si interessa di didattica della matematica e di formazione dei docenti, ha partecipato a numerose edizioni dell'Officina Matematica presso la Casa-Laboratorio di Cenci e a 5 scuole estive UMI-CIIM, ha svolto attività di ricerca-azione sul problem solving e sull'argomentazione in matematica, ha collaborato con il Centro MateMatita per il progetto "Math en jeans" e per la sperimentazione Math Up di percorsi di didattica laboratoriale nel primo anno degli istituti professionali, con la casa editrice Zanichelli per la redazione di proposte innovative di prova d'esame di matematica, con la provincia di Bolzano come formatore di docenti della scuola secondaria di primo grado.

Stefania Donadio
I. O. annesso al Convitto Nazionale C. Colombo, scuola Don Milani
C.so Carbonara 7 g, 16124 Genova, Italia
E-mail stefania.donadio@donmilani.wikischool.it

Laureata in fisica, ha insegnato nella scuola secondaria di primo e di secondo grado. Si interessa di didattica della matematica e di formazione dei docenti, ha collaborato con l'USR della Liguria in diversi corsi di formazione professionale, con l'Università di Genova, dipartimento di Matematica, sul curricolo verticale nella scuola del primo ciclo, con diversi istituti della provincia di Genova, come formatrice nei progetti PON, ha svolto attività di ricerca-azione sul problem solving, sul curricolo nelle materie STEM per competenze e sulle comunità professionali di docenti nell'uso delle tecnologie didattiche.

Received December 16, 2019; *revised* January 20, 2020; *accepted* March 18, 2020; *published online* June 3, 2020

Open Access This paper is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)